教材新視界．活力♥全華

全華TopLine
全球華人的知識薪傳
www.chwa.com.tw

2015 第10期 獨家發行

【數學 MATHEMATICS 專刊】

三次、四次方程式的解法及背後意涵

泰山高中　江前佑老師

自古以來，方程式[註1]的求解問題一直是數學家們關心的重要問題。事實上人類很早就了解一元一次與一元二次方程式的解法，然而三次以上的方程式，直到十六世紀才慢慢透過 Cardano、Ferrari 及 Lagrange 等人的努力，逐步探究出三次、四次方程式的公式解[註2]及其背後的意義，引發了十九世紀 Abel 與 Galois 對於五次與五次以上方程式公式解的全盤了解，也就是大家所熟知的 Galois 理論，這都促進了抽象代數的發展。本文從三次方程式 Cardano 解法開始，透過 Lagrange 對於其解法的分析，試圖向讀者展示公式解背後的意義，同時類比四次方程式的情形，希望能了解公式解與多項式對稱性的關係。

註

1. 本文提及之方程式指一元 n 次多項式之方程式，其他形式的方程式不在討論的範圍。
2. 公式解也稱為根式解，將方程式的解以方程式係數之根式來表示。

一、三次方程式解法

對於一般的一元三次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$，我們可以利用平移將此一般式化為一個較簡單的形式（附錄一）。令 $y=x+\dfrac{a}{3}$，我們得到

$$y^3+py+q=0\text{，其中 } p=b-\frac{a^2}{3}\text{，}q=c-\frac{ab}{3}+\frac{2}{27}a^3$$

把 $y=u+v$ 代入上式並展開，得

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0$$

$$(u^3+v^3+q)+(3uv+p)(u+v)=0$$

我們需要找到一組 u、v 滿足上述方程式，因此假設

$$\begin{cases}3uv+p=0\\ u^3+v^3+q=0\end{cases}$$

使用代入消去法將 $v=\dfrac{-p}{3u}$ 代入整理可得 u 的六次方程式，

$$u^6+qu^3-\frac{p^3}{27}=0 \tag{1}$$

將這個式子視為以 u^3 為變數的二次方程式，利用一元二次方程式公式解可得

$$u^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{R}=0\text{，其中 } R=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$$

開三次方根可解出

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{R}},\omega\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{R}},\omega^2\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{R}},\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{R}},\omega\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{R}},\omega^2\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{R}}$$

其中 ω 為 $\omega^2+\omega+1=0$ 之一根註3

相對應的 v 為

$$v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{R}},\omega^2\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{R}},\omega\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{R}},\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{R}},\omega^2\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{R}},\omega\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{R}}$$

註

3. 解法中自然地引進了複數，不管是否全為實根，當時複數的未知造成了對三次式解法的困難。

這些 u、v 將重複者略去可組成 3 根[註4]，這就是著名的 Cardano 公式

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{R}} \\ y_2 = \omega \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{R}} + \omega^2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{R}} \\ y_3 = \omega^2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{R}} + \omega \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{R}} \end{cases} \quad (2)$$

上述引入 u、v 的做法彷彿神來一筆，然而我們可以從 Lagrange 對此解法的分析中發現一些線索。一般而言，方程式公式解是以方程式係數之根式來表示根，他採取了相反的方向，引入以每個根為變數的多變數多項式，希望它可以用方程式的係數來表示。以一元二次方程式為例，欲解 $x^2 + ax + b = 0$，假設其兩根為 x_1、x_2，由 $x^2 + ax + b = (x - x_1)(x - x_2)$ 可推得根與係數關係

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 \cdot x_2 = b \end{cases}$$

對於求公式解來說，這些根的多項式（也稱為 x_1、x_2 的基本多項式[註5]）是相當不利的，雖然它們良好的對稱性質得以使我們以方程式的係數表示，卻也使我們無法以單純的方式將它們分離，所以我們必須引入其他 x_1、x_2 的多項式來破壞對稱。

假設 $u = x_1 - x_2$，如果我們可以把 u 以方程式係數來表示，再利用兩根和的關係就可以解出 x_1、x_2。

$$u^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = a^2 - 4b$$

$$u = \pm\sqrt{a^2 - 4b}$$

因此

$$x_1 = \frac{-a+u}{2} = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \text{，} x_2 = \frac{-a-u}{2} = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

也就是大家所熟悉的一元二次方程式公式解。

註

4. 可知方程式求解時，只需選取一固定者開三次方根即可，其餘在根的組合中會重複出現。

5. x_1，x_2，⋯，x_n 的基本多項式為：$x_1 + x_2 + \cdots + x_n$、$\Sigma x_i x_j = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots$、$\Sigma x_i x_j x_k = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots$、⋯、$x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n$。

眼尖的讀者不難發現上述的解法仍有些許的問題，對於一般的方程式而言，是否能找到我們引入的多項式（也就是上述的 $x_1 - x_2$）？這些多項式是否能以方程式的係數來表示呢？

Lagrange 對這些問題提出一個簡單的觀察：我們所熟悉的只有這些以根為變數的基本多項式與方程式係數的關係（根與係數關係），這些基本多項式最重要的性質在於它們除了是對稱多項式註6之外，同時也可以用以表示所有的對稱多項式（附錄二）。因此我們引入的多項式必須包含某些程度的對稱性，Lagrange 把它稱為部分對稱性註7（partially symmetric）。

現在讓我們回到三次方程式的情況，將 (2) 式中的 y_1、y_2 和 y_3 分別乘上 1、ω 和 ω^2 相加，將此作為引入的多項式（稱為 Lagrange resolvent）：

$$\psi_1 = y_1 + \omega \cdot y_2 + \omega^2 \cdot y_3 \tag{3}$$

事實上由於 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$，我們甚至不需平移，直接考慮原方程式的變數。

$$\begin{aligned}\psi_1 &= y_1 + \omega \cdot y_2 + \omega^2 \cdot y_3 \\ &= (x_1 + \frac{a}{3}) + \omega(x_2 + \frac{a}{3}) + \omega^2(x_3 + \frac{a}{3}) \\ &= \frac{a}{3}(1 + \omega + \omega^2) + (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3) \\ &= x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3\end{aligned}$$

我們的目標是要將 ψ_1 以方程式的係數來表示，這意味著 ψ_1 必須能以 x_1、x_2 和 x_3 的基本多項式來表示。換句話說，ψ_1 必須是 x_1、x_2 和 x_3 的對稱多項式的組成元素，因為這樣一來這個對稱多項式才能用基本多項式表示出來（基本多項式的多項式）。因此我們補足 ψ_1 中所有的置換（將置換群 S_3 中所有的元素作用於 ψ_1 上），不難觀察出

註

6. 對所有置換群 S_n 中的元素，作用於多項式上皆不改變其多項式，則此多項式稱為對稱多項式。
例如：$x_1 + x_2 + x_3$ 是一個基本多項式，$(1, 2)$ 是置換群 S_3 中的元素，作用於基本多項式 $x_1 + x_2 + x_3$ 的意思是將 x_1 與 x_2 的足碼交換，則不難發現 $(1, 2)(x_1 + x_2 + x_3) = x_2 + x_1 + x_3 = x_1 + x_2 + x_3$
若所有 S_3 中的元素作用於 $x_1 + x_2 + x_3$ 皆有相同的性質時，則稱 $x_1 + x_2 + x_3$ 為對稱多項式。
7. 對 S_n 的某個子群中的元素，作用於多項式上皆不改變其多項式，則其稱為部分對稱多項式。

這些置換後的結果

$$\begin{cases} \psi_1 = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 \\ \psi_2 = \omega\psi_1 = x_3 + \omega x_1 + \omega^2 x_2 \\ \psi_3 = \omega^2\psi_1 = x_2 + \omega x_3 + \omega^2 x_1 \\ \psi_4 = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 \\ \psi_5 = \omega\psi_4 = x_2 + \omega^2 x_3 + \omega x_1 \\ \psi_6 = \omega^2\psi_4 = x_3 + \omega^2 x_1 + \omega x_2 \end{cases} \tag{4}$$

在構造出 x_1、x_2 和 x_3 的對稱多項式之前，我們可以很自然地構造出 ψ_1、ψ_2、⋯、ψ_6 的對稱多項式。接著定義方程式

$$(t-\psi_1)(t-\psi_2)(t-\psi_3)(t-\psi_4)(t-\psi_5)(t-\psi_6) = 0 \tag{5}$$

就會發現此方程式的係數是 ψ_1、ψ_2、⋯、ψ_6 的基本多項式（對稱多項式），任何的置換只有在 ψ_1、ψ_2、⋯、ψ_6 之間發生互換，皆不影響這些係數，因此 x_1、x_2 和 x_3 不受到任何置換影響，所以此方程式的係數也是 x_1、x_2 和 x_3 的對稱多項式。

這樣一來我們就可以利用 (4) 的關係式以及 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 把 (5) 改寫成

$$(t-\psi_1)(t-\omega\psi_1)(t-\omega^2\psi_1)(t-\psi_4)(t-\omega\psi_4)(t-\omega^2\psi_4) = 0$$

$$(t^3-\psi_1^3)(t^3-\psi_4^3) = 0$$

$$t^6 - (\psi_1^3 + \psi_4^3)t^3 + (\psi_1^3\psi_4^3) = 0$$

其中

$$\psi_1^3\psi_4^3 = [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)]^3 = [(\Sigma x_i)^2 - 3(\Sigma x_ix_j)]^3$$

$$\begin{aligned} \psi_1^3 + \psi_4^3 &= (\psi_1 + \psi_4)(\psi_1 + \omega\psi_4)(\psi_1 + \omega^2\psi_4) \\ &= (2x_1 - x_2 - x_3)(2x_3 - x_1 - x_2)(2x_2 - x_3 - x_1) \\ &= 2(\Sigma x_i)^3 - 9(\Sigma x_i)(\Sigma x_ix_j) + 27x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

再利用原三次方程式的根與係數關係就可以得到

$$t^6 + (2a^3 - 9ab + 27c)t^3 + (a^2 - 3b)^3 = 0 \tag{6}$$

注意此式與 (1) 式只有在未知數部分相差 3 倍，這表示 Cardano 解法中引入的 u、v，和 Lagrange 所引入的多項式幾乎是一樣的，因此以 Lagrange 的角度來說，u、v 其作用即為用以破壞對稱性求解的部分對稱多項式。

最後，當我們把 (6) 式視為 t^3 的二次方程式時，我們可以解出兩根 θ、θ'，分別開三次方根就可以得到 ψ_1、ψ_4，也就是說

$$\begin{cases}\psi_1=\sqrt[3]{\theta}=x_1+\omega\cdot x_2+\omega^2\cdot x_3\\ \psi_4=\sqrt[3]{\theta'}=x_1+\omega^2\cdot x_2+\omega\cdot x_3\end{cases}$$

再利用 $x_1+x_2+x_3=-a$，因此可得

$$x_1=\frac{-a+\sqrt[3]{\theta}+\sqrt[3]{\theta'}}{3},\ x_2=\frac{-a+\omega^2\cdot\sqrt[3]{\theta}+\omega\sqrt[3]{\theta'}}{3},\ x_3=\frac{-a+\omega\cdot\sqrt[3]{\theta}+\omega^2\cdot\sqrt[3]{\theta'}}{3}\tag{7}$$

我們用一個例題來結束本部分的介紹，看看實際是如何運作的。

例題：解 $x^3-7x^2+14x-8=0$

把方程式係數帶入 (6) 式可得

$$t^6-20t^3+343=0$$

視為 t^3 的二次方程式可利用二次公式解出

$$\psi_1{}^3=\frac{20+\sqrt{400-4\cdot343}}{2}=10+9\sqrt{3}i$$

$$\psi_4{}^3=\frac{20-\sqrt{400-4\cdot343}}{2}=10-9\sqrt{3}i$$

再利用複數極式以及 De Moivre 定理求其三次方根

$$\psi_1=\sqrt[3]{\theta}=x_1+\omega x_2+\omega^2x_3=-2+\sqrt{3}i$$

$$\psi_2=\sqrt[3]{\theta'}=x_1+\omega^2x_2+\omega x_3=-2-\sqrt{3}i$$

注意根與係數關係 $x_1+x_2+x_3=7$，則我們利用 (7) 解出

$$x_1=\frac{-a+\sqrt[3]{\theta}+\sqrt[3]{\theta'}}{3}=\frac{7+(-2+\sqrt{3}i)+(-2-\sqrt{3}i)}{3}=1$$

$$x_2=\frac{-a+\omega^2\cdot\sqrt[3]{\theta}+\omega\cdot\sqrt[3]{\theta'}}{3}=\frac{7+(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})(-2+\sqrt{3}i)+(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})(-2-\sqrt{3}i)}{3}=4$$

$$x_3=\frac{-a+\omega\cdot\sqrt[3]{\theta}+\omega^2\cdot\sqrt[3]{\theta'}}{3}=\frac{7+(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})(-2+\sqrt{3}i)+(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})(-2-\sqrt{3}i)}{3}=2$$

二、四次方程式解法

對於一般的四次方程式 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$，Cardano 的學生 Ferarri 觀察到以下事實，首先可將上式變為 $x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d$，接著將左式加以配方

$$(x^2)^2 + 2\cdot(x^2)\cdot(\frac{ax}{2}) + (\frac{ax}{2})^2 = (\frac{ax}{2})^2 - bx^2 - cx - d$$

$$(x^2 + \frac{a}{2}x)^2 = (\frac{a^2}{4} - b)x^2 - cx - d \tag{8}$$

Ferarri 發現上式的左邊為完全平方，而右邊未必是完全平方，他認為若可以適當地引入變數 y，使 (8) 式的左右兩邊皆為完全平方，則四次方程式的求解，便轉化為兩個二次方程式的求解。我們將 (8) 式再加以改寫

$$(x^2 + \frac{a}{2}x)^2 + 2(x^2 + \frac{a}{2}x)\frac{y}{2} + (\frac{y}{2})^2 = (\frac{a^2}{4} - b)x^2 - cx - d + 2(x^2 + \frac{a}{2}x)\frac{y}{2} + (\frac{y}{2})^2$$

$$(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2})^2 = (\frac{a^2}{4} - b + y)x^2 + (\frac{ay}{2} - c)x + (\frac{y^2}{4} - d) \tag{9}$$

由於 (9) 式中的左式為完全平方，故其右式可視為以 x 為變數之完全平方式，其判別式為 0

$$(\frac{ay}{2} - c)^2 - 4(\frac{a^2}{4} - b + y)(\frac{y^2}{4} - d) = 0$$

整理得

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - [c^2 + d(a^2 - 4b)] = 0 \tag{10}$$

可利用三次方的 Cardano 解法將 y 解出，再代入 (9) 式，進行因式分解後，可得兩個二次方程，便可求出其解。

Lagrange 認為 Ferarri 的解法中 y 的引入，本質上也是在破壞以方程式解為變數之多項式的對稱性，他引入部分對稱多項式

$$\psi_1 = x_1x_2 + x_3x_4$$

為了構造出 x_1、x_2、x_3 和 x_4 的對稱多項式，他補足了所有的置換[註8]

$$\begin{cases} \psi_1 = x_1x_2 + x_3x_4 \\ \psi_2 = x_1x_3 + x_2x_4 \\ \psi_3 = x_2x_3 + x_1x_4 \end{cases} \tag{11}$$

接著定義方程式

$$(t - \psi_1)(t - \psi_2)(t - \psi_3) = 0 \tag{12}$$

此方程式的係數就會是 ψ_1、ψ_2 和 ψ_3 的基本多項式，基於與三次式情況相同的理由，此方程式的係數也是 x_1、x_2 和 x_3 的對稱多項式。我們可以進行類似的計算，利用 (8) 的關係式把 (10) 改寫成

$$t^3 - (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3)t^2 + (\psi_1\psi_2 + \psi_2\psi_3 + \psi_3\psi_1)t - (\psi_1\psi_2\psi_3) = 0$$

其中

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = x_1x_2 + x_3x_4 + x_1x_3 + x_2x_4 + x_2x_3 + x_1x_4$$

$$\begin{aligned}\psi_1\psi_2 + \psi_2\psi_3 + \psi_3\psi_1 &= \Sigma x_i^2x_jx_k \\ &= (\Sigma x_ix_jx_k)(\Sigma x_i) - 4x_1x_2x_3x_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_1\psi_2\psi_3 &= \Sigma x_i^2x_j^2x_k^2 + \Sigma x_i^3x_jx_kx_l \\ &= (\Sigma x_ix_jx_k)^2 - 2(\Sigma x_i^2x_j^2x_kx_l) + x_1x_2x_3x_4(\Sigma x_i^2) \\ &= (\Sigma x_ix_jx_k)^2 - 2x_1x_2x_3x_4(\Sigma x_ix_j) + x_1x_2x_3x_4[(\Sigma x_i)^2 - 2(\Sigma x_ix_j)] \\ &= (\Sigma x_ix_jx_k)^2 + x_1x_2x_3x_4[(\Sigma x_i)^2 - 4(\Sigma x_ix_j)]\end{aligned}$$

再利用原三次方程式的根與係數關係就可以得到

$$t^3 - bt^2 + (ac - 4d)t - [c^2 + d(a^2 - 4b)] = 0 \tag{13}$$

相信讀者們已經發現，(13) 式與 (10) 式完全相同，這印證了 Ferarri 為了配方所引入的 y 與 Lagrange 所引入的多項式，達成了相同的效果，同樣的破壞了對稱性，我們只要解出 (13) 的任一根就可以破壞對稱性求解。現在我們不仿假設解出 $t = \psi_1 = x_1x_2 + x_3x_4$，假設 $z_1 = x_1x_2$、$z_2 = x_3x_4$，此時

$$\psi_1 = x_1x_2 + x_3x_4 = z_1 + z_2$$

註

8. S_4 中的元素有 e、(1, 2)、(1, 3)、(1, 4)、(2, 3)、(2, 4)、(3, 4)、(1, 2, 3)、(1, 2, 4)、(1, 3, 4)、(2, 3, 4) 等 24 個元素，理論上應有 24 種，然而 $\psi_1 = x_1x_2 + x_3x_4$ 本身也具有相當程度的對稱性，當 (1, 2)、(3, 4) 或 (1, 3)(2, 4) 等元素作用於其上時，並不會產生新的多項式，因此不難發現不同的多項式僅有 3 種。

再由根與係數關係知

$$d=(x_1x_2)(x_3x_4)=z_1z_2$$

因此我們可以構造出以 z_1、z_2 為兩根的多項式

$$z^2-\psi_1 z+d=0 \tag{14}$$

解出 z_1 和 z_2 後，再代回根與係數關係

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-c$$
$$\Rightarrow x_1x_2(x_3+x_4)+x_3x_4(x_1+x_2)=-c$$
$$\Rightarrow z_2(x_1+x_2)+z_1(x_3+x_4)=-c$$

聯立可得

$$\begin{cases}(x_1+x_2)+(x_3+x_4)=-a\\ z_2(x_1+x_2)+z_1(x_3+x_4)=-c\end{cases} \tag{15}$$

解出 x_1+x_2 後，再搭配 $z_1=x_1x_2$，構造出以 x_1 和 x_2 的二次方程式，便可解出 x_1 與 x_2，同理 x_3 和 x_4 可利用相同的方法解出。因此四次方程式的求解可轉化為一個三次式與三個二次方程式的求解。有趣的是其他的引入也可以破壞對稱性，假設

$$\begin{cases}u=x_1+x_2-x_3-x_4\\ v=x_1-x_2+x_3-x_4\\ w=x_1-x_2-x_3+x_4\end{cases}$$

觀察其調換之後的結果可以證明

$$u^2+v^2+w^2$$
$$u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2$$
$$u^2v^2w^2$$

都是對稱式，可用根與係數來表示，因此考慮方程式

$$(t-u^2)(t-v^2)(t-w^2)=0$$

令

$$A=u^2+v^2+w^2$$
$$B=u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2$$
$$C=u^2v^2w^2$$

則 u^2、v^2 和 w^2 滿足一個三次方程式 $t^3-At^2+Bt-C=0$，再用三次方程式的解法可求出 u、v、w，相加之後除以 3 可求出 x_1，類似作法可求出剩餘的根。

我們用一個例題來結束本部分的介紹，看看實際是如何運作的。

例題：解 $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$

把方程式係數代入 (13) 式得

$$t^3 - 5t^2 - t + 5 = 0$$

利用 Cardano 解法或直接分解可得 $t = \psi_1 = x_1x_2 + x_3x_4 = 5$，再由根與係數關係，構造 (14) 之二次方程式

$$z^2 - 5z - 6 = 0$$

因此 $z_1 = x_1x_2 = -1$、$z_2 = x_3x_4 = 6$，故 (15) 式之聯立方程組為

$$\begin{cases}(x_1+x_2)+(x_3+x_4)=-a\\ z_2(x_1+x_2)+z_1(x_3+x_4)=-c\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x_1+x_2)+(x_3+x_4)=5\\ 6(x_1+x_2)-(x_3+x_4)=-5\end{cases}$$

解之得 $x_1 + x_2 = 0$，又 $x_1x_2 = -1$，故以 x_1 和 x_2 為兩根的方程式為 $x^2 - 1 = 0$，因此 $x_1 = 1$、$x_2 = -1$，同理可解出 $x_3 = 2$、$x_4 = 3$。

三、結語

從三次方程式與四次方程式公式解的探討之中，不難發現其關鍵在於破壞解的對稱性，如何構造具有部分對稱的多變數多項式（以解為變數）是主要的困難所在，因此對稱性的探討是必要的課題，Lagrange 以此建立了置換群的理論，最後透過 Abel 和 Galois 的努力，發現五次以上公式解的存在性取決於置換群是否存在正則子群（normal subgroup），完整解決了多項方程式公式解的存在性，同時將抽象代數中群論與體論連繫在一起，令人不禁讚嘆其結果之美妙。

本文寫於筆者就讀研究所期間，希望能解釋方程式根式解與置換之間的關聯。今年重寫時，依原有的脈絡，補足了四次方的解法及相關說明，充其量只能說是自己的讀書心得，如有錯誤，還請讀者們不吝指教。

參考資料

1. 代數方程與置換群　李世雄著

附錄一　利用平移將三次方程式化簡

假設 $y=x-k$，我們把一般的三次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 之左式改寫為 $x-k$ 之多項式並使其二次項係數為 0，也就是說要決定下列多項式之係數 k、p 和 q。

$$x^3+ax^2+bx+c=(x-k)^3+p(x-k)+q$$

比較等號左右兩邊的係數，我們可以得到：

二次項係數 $a=-3k \Rightarrow k=-\dfrac{a}{3}$

一次項係數 $b=3k^2+p \Rightarrow p=b-3\cdot(-\dfrac{a}{3})^2=b-\dfrac{a^2}{3}$

常數項 $c=-k^3-pk+q \Rightarrow c=-(-\dfrac{a}{3})^3-(b-\dfrac{a^2}{3})(-\dfrac{a}{3})+q \Rightarrow q=c+\dfrac{2}{27}a^3-\dfrac{ab}{3}$

附錄二　對稱多項式必為基本多項式之多項式的補充證明

定理：若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是對稱多項式 $\Rightarrow$ 必為基本多項式的多項式。

證明：對 n 作數學歸納法。首先在 $n=1$ 時顯然成立。

假設對於 $n=1,2,\cdots,n-1$ 的情況皆成立，

也就是說 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 令 $x_n=0$，得到 $f(x_1,x_2,\cdots,0)$ 是一個對 $n-1$ 個變數對稱的對稱多項式。

令 $g(\sigma_1',\sigma_2',\cdots,\sigma_{n-1}')=f(x_1,x_2,\cdots,0)$

且 $\begin{cases}\sigma_1'=x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\\ \sigma_2'=x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}\\ \quad\vdots\\ \sigma_{n-1}'=x_1x_2\cdots x_{n-1}\end{cases}$　再把 x_n 項寫回去

$\begin{cases}\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n\\ \sigma_2=x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}+x_{n-1}x_n\\ \quad\vdots\\ \sigma_{n-1}=x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n\end{cases}$

把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-g(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{n-1})$，有 x_n 的因式，因為 x_n 代入為 0，所以重複使用歸納法可得到

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-g(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{n-1})=x_n{}^Mx_{n-1}{}^M\cdots x_1{}^M F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，

其中 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 對 n 個變數對稱，但次數降低 nM 次。

在有限次數內得知 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是基本多項式的多項式。

貼心小撇步

資料來源：網路轉載

誠摯邀請老師分享您精闢的見解及投稿，投稿請寄：we04@chwa.com.tw

- 您的稿件企劃部將視情況刪修，修改後會寄給您過目，您同意後才會刊登。
- 投稿作品，視同授權本刊書面及電子版刊載。作品一經刊登將依字數致贈稿酬。
- 來稿請勿侵害他人著作權，如有引文，請註明參考資料來源。
- 來稿請附作者資料：姓名、任教學校、聯絡電話／地址、電子郵件信箱。

如有任何疑問，歡迎您 E-mail 或來電詢問：02-2262-5666 # 213 廖先生。

致育無他 愛與榜樣
全華圖書
全球華人的知識薪傳
www.chwa.com.tw

總公司／北區高中營業處
地址：新北市土城區忠義路 21 號
電話：（02）2262-5666
傳真：（02）2262-0565

中區高中營業處
地址：臺中市南區樹義一巷 26 號 2 樓
電話：（04）2261-8485
傳真：（04）3601-8600

南區高中營業處
地址：高雄市三民區應安街 12 號
電話：（07）381-1377
傳真：（07）960-2868