

## 【數學】 MATHEMATICS 【數學專刊】

# 102年學科能力測驗 數學考科趨勢分析

全華數學科編撰團隊

## 壹、大考中心對 99 課綱之數學考科學科能力測驗考試說明

自民國 102 年開始，「學科能力測驗數學考科」命題方式即將依據 99 學年度實施之「普通高級中學課程綱要」（或稱「99 課綱」）命題，縱使高中數學教材是開放編輯的，但大考中心公布數學考科命題仍會秉持下列原則：

1. 「學科能力測驗數學考科」主要是測驗高中階段學生的數學基本概念，以及使用這些概念解題的能力。
2. 試題中所用到的數學名詞或概念，如非所有版本通用者，都將在試卷中加以說明。

因此，考生所要準備的不是多讀幾家出版社的課本，準備重點也不在解題技巧，而是要熟悉及瞭解課本上所介紹的數學基本概念。

又大考中心針對即將登場的 99 課綱之學科能力測驗，所公布數學科考試之測驗目標、測驗範圍及試卷內容與設計的說明，我們擇要分述如下：

## 一、測驗目標：

學習數學有三個重要指標層面：概念性知識、程序性知識和解決問題的能力，學科能力測驗即依此三個層面來設定測驗目標：

測驗指標層面	內涵說明	考題範例
概念性知識	能辨認某一概念，例如能確認概念中的基本數學原理。	98 年多選題第 8 題 (如附件)
程序性知識	解題邏輯，能讀圖、查表，或運用適當的公式與步驟解題。	99 年單選題第 2 題 (如附件)
解決問題的能力	綜合應用，能應用數學知識、選擇有效策略及推理能力解決問題，並能檢驗結果的合理性與正確性。	100 年選填題第 F 題 (如附件)

## 二、測驗內容

學科能力測驗數學考科的測驗範圍為高一、高二必修課程，包括數學 I、II、III 以及 IV 的 A 版範圍(課綱中將數學 IV 區分為 A、B 兩版本，實質上，B 版只是擴充了 A 版的內容，以一般的角度來說，A 版相當於社會組學生研習的版本。目前坊間並沒有單純 A 版的課本，各家書局都是出版 B 版本，然後以「©」或其他符號註記社會組學生不用研讀的單元。)

大考中心對 102 年學測數學考科(採 99 課綱)所公布的試卷題型與評量目標，我們整理如下表：

測驗題型	評量目標
選擇題(單選題、多選題)	評量數學概念，並鼓勵學生根據給予的選項作判斷。
選填題	評量考生主動解題的能力。

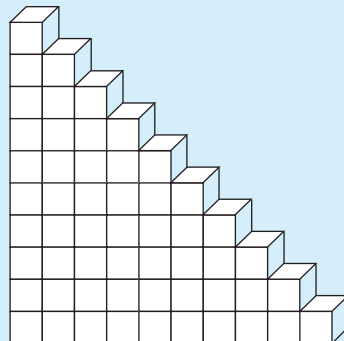
換言之，「學科能力測驗數學考科」主要是要測驗高中階段的學生應有的數學基本概念，以及能夠使用這些概念直接解題的能力，所以試題設計上會有『所需之計算大多不會太複雜、多數題目所需之解題步驟較少』的特點，是故著重基本概念的準備與基本題型的練習更勝於鑽研特殊技巧之解題。

觀察歷年數學考科的測驗，通常選擇題部分都較注重數學概念的評量，約占 60 分；選填題部分則較注重綜合應用與主動解題能力的評量，即能應用數學知識、選擇有效策略及推理能力解決問題的評量，約占 40 分。近兩年(100 年與 101 年)選擇題的占分為 65 分，選填題為 35 分，似乎有逐漸加重數學概念的評量趨勢。此外，進一步分析也發現，測驗除了評量學生是否熟悉及瞭解課本上所學的基本概念外，也愈來愈注重數學學習能力上的一個重要指標——解決問題的能力，即能否應用數學知識、選擇有效策略及推理能力解決問題，並能檢驗結果的合理性與正確性。底下，我們舉例就選擇題與選填題說明如下：

一、選擇題：（評量數學概念，並鼓勵學生根據給予的選項作判斷）

範例1：101年單選題2

將邊長為 1 公分的正立方體堆疊成一階梯形立體，如圖所示，其中第 1 層（最下層）有 10 塊，第 2 層有 9 塊，…，依此類推。當堆疊完 10 層時，該階梯形立體的表面積（即該立體的前、後、上、下、左、右各表面的面積總和）為多少？

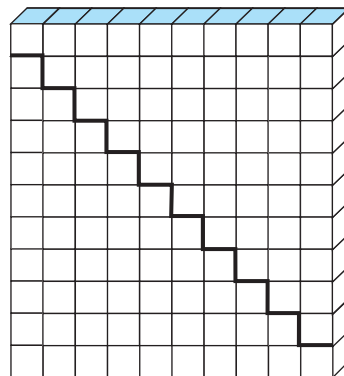


- (1) 75 平方公分 (2) 90 平方公分 (3) 110 平方公分  
(4) 130 平方公分 (5) 150 平方公分

【說明】

（思考法一：直接求算法）

前後側面積為  $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) \times 2 = 55 \times 2 = 110$ （平方公分），  
上下側與左右側面積為  $10 \times 2 \times 2 = 40$ （平方公分），  
所以，總表面積應為  $110 + 40 = 150$ （平方公分）。



（思考法二）

再取一塊大小形狀相同的實體補為長方體，  
即得一個  $10 \times 11$  的矩形體，  
其中共有 19 格（面）是重疊且遮蔽住，  
故總表面積為新矩形體面積之半再補加 19 格，

$$\text{即 } \frac{10 \times 11 \times 2 + 10 \times 1 \times 2 + 11 \times 1 \times 2}{2} + 19 = 150 \text{（平方公分）。}$$

（思考法三）

採梯形面積求法，  
將上 5 層翻轉與下 5 層疊合成一個  $5 \times 11 \times 1$  的長方體，  
此長方體表面積為

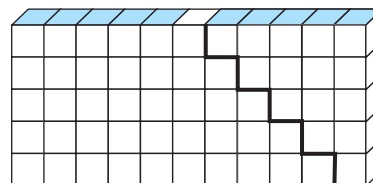
$$5 \times 11 \times 2 + 5 \times 2 + 11 \times 2 = 142 \text{（平方公分），}$$

又在折疊過程中，面積會因重疊而有增減：如圖的藍色部分為多出部分，共 10 格。

而粗線部分是因重疊而少掉部分，共  $9 \times 2 = 18$ （格）。

合計重疊後共少了  $18 - 10 = 8$  小格，即 8 平方公分。

所以，表面積應為  $142 + 8 = 150$ （平方公分）。



這個想法想說明的是，當求得疊合成的矩形體之表面積為 142 平方公分時，採行大考中心公布的評量目標：「根據給予的選項作判斷」，那麼只有選項 (5) 150 平方公分才有可能為答案。

**範例2：101年單選題3**

下表為常用對數表  $\log_{10}N$  的一部分：

$N$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900

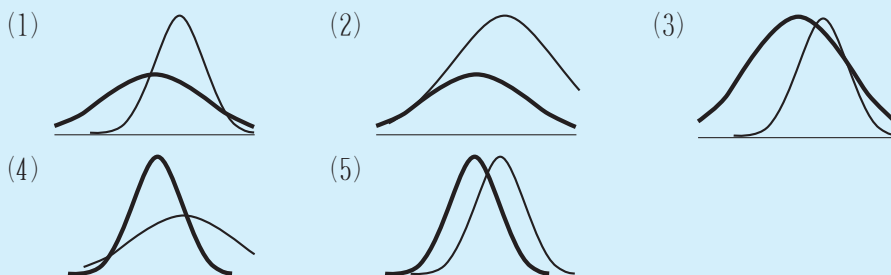
請問  $10^{3.032}$  最接近下列哪一個選項？ (1) 101 (2) 201 (3) 1007 (4) 1076 (5) 2012。

**【說明】** 這題評量學生是否了解對數及對數表，只要概念正確，由表可立即估出答案為1076，並不需計算或利用內插法。理由如下：

首先，由  $10^{3.032}$  知此數必大於 1000。由附表知  $\log 1.07 < 0.032 < \log 1.08$ ，所以  $1000 \times 1.07 < 10^{3.032} = 10^3 \times 10^{0.032} < 1000 \times 1.08$ ，故選 1076。

**範例3：101年單選題4**

甲、乙兩校有一樣多的學生參加數學能力測驗，兩校學生測驗成績的分布都很接近常態分布，其中甲校學生的平均分數為 60 分，標準差為 10 分；乙校學生的平均分數為 65 分，標準差為 5 分。若用粗線表示甲校學生成績分布曲線；細線表示乙校學生成績分布曲線，則下列哪一個分布圖較為正確？



**【說明】** 這也是概念性的題目，若能對統計圖形有清楚的概念，便很容易判讀。

- ① 由於學生數一樣多，所以分布圖曲線下面積應相等，故刪除 (2)、(3) 選項。
- ② 常態分布時對稱軸恰為平均數、中位數所在。(各圖均滿足乙校平均大於甲校平均)
- ③ 而標準差愈大其分布愈寬廣。故只有選項 (1) 符合

**範例4：100年單選題2**

多項式  $4(x^2 + 1) + (x + 1)^2(x - 3) + (x - 1)^3$  等於下列哪一個選項？

- (1)  $x(x + 1)^2$  (2)  $2x(x - 1)^2$  (3)  $x(x - 1)(x + 1)$  (4)  $2(x - 1)^2(x + 1)$
- (5)  $2x(x - 1)(x + 1)$

【說明】可以測驗多項式展開、加減運算與分解能力（如思考法一），也可測驗因式定理的應用（如思考法二），或多項式恆等定理的應用（如思考法三）等。

**（思考法一）**

將各項展開，重新整理得

$$\begin{aligned}
 &4(x^2+1) + (x+1)^2(x-3) + (x-1)^3 \\
 &= (4x^2+4) + (x^3-x^2-5x-3) + (x^3-3x^2+3x-1) = 2x^3-2x = 2x(x-1)(x+1),
 \end{aligned}$$

只有選項(5)符合。

**（思考法二：利用因式定理）**

取 $f(x) = 4(x^2+1) + (x+1)^2(x-3) + (x-1)^3$ ，則 $f(x)$ 為三次多項式，依所給選項研判，發現 $x$ 、 $(x-1)$ 、 $(x+1)$ 幾乎是所給選項的部分共同因式，故以 $x=0$ 、 $1$ 、 $-1$ ，一一代入 $f(x)$ 檢驗，得：

$$f(0) = 4 - 3 - 1 = 0, f(1) = 8 - 8 + 0 = 0, f(-1) = 8 + 0 - 8 = 0,$$

知 $f(x)$ 有 $x(x-1)(x+1)$ 之因式，

又其最高次項 $x^3$ 的係數為 $2$ ，所以 $f(x) = 2x(x-1)(x+1)$ ，故選項(5)才正確。

**（思考法三：利用多項式恆等定理）**

由兩多項式恆等定理知，若兩個多項式相等，則不論將 $x$ 代入何值，所得的值應相等，我們選擇取 $x=2$ 代入原式與各選項，得：原式之值為 $f(2) = 20 - 9 + 1 = 12$ ，而各選項之值為 (1) 18 (2) 4 (3) 6 (4) 6 (5) 12，只有選項(5)符合。

在這個思考法中，有人會以 $x=3$ 代入檢驗，這是很好的選擇。

但若以 $x=0$ 、 $1$ 、 $-1$ 代入檢驗，由於 $x$ 、 $(x-1)$ 、 $(x+1)$ 幾乎是所給選項的部分共同因式，便達不到立即篩選的效果。而這也就是解題思考邏輯問題，能否選擇有效策略及推理能力，使用有效率的方法，解決問題。

**範例5：100年單選題6**

根據臺灣壽險業的資料，男性從0歲、1歲、…到60歲各年齡層的死亡率（單位：%）依序為

1.0250, 0.2350, 0.1520, 0.1010, 0.0720, 0.0590, 0.0550, 0.0540, 0.0540, 0.0520, 0.0490, 0.0470, 0.0490, 0.0560, 0.0759, 0.1029, 0.1394, 0.1890, 0.2034, 0.2123, 0.2164, 0.2166, 0.2137, 0.2085, 0.2019, 0.1948, 0.1882, 0.1830, 0.1799, 0.1793, 0.1813, 0.1862, 0.1941, 0.2051, 0.2190, 0.2354, 0.2539, 0.2742, 0.2961, 0.3202, 0.3472, 0.3779, 0.4129, 0.4527, 0.4962, 0.5420, 0.5886, 0.6346, 0.6791, 0.7239, 0.7711, 0.8229, 0.8817, 0.9493, 1.0268, 1.1148, 1.2139, 1.3250, 1.4485, 1.5851, 1.7353。

經初步整理後，已知61個資料中共有24個資料小於0.2。請問死亡率資料的中位數為下列哪一個選項？ (1) 0.2034 (2) 0.2164 (3) 0.2137 (4) 0.2085 (5) 0.2019。

【說明】

評量解題思考邏輯，能否選擇有效策略及推理能力，使用有效率的方法，自題目所提供的一大串數字中，迅速找出所需的數值，解決問題。解題過程略述：

先將小於 0.2 的 24 個數畫線刪除，以減少視覺上的混亂，再將所剩的資料依 0.20xx，0.21xx，0.22xx 的順序挑出排列，此時排於第 7 位的數即原來排於第 31 位的數，也就是中位數。

二、選填題：（評量考生主動解題的能力）

範例6：101年選填題B

設  $A(1, 1)$ 、 $B(3, 5)$ 、 $C(5, 3)$ 、 $D(0, -7)$ 、 $E(2, -3)$  及  $F(8, -6)$  為坐標平面上的六個點。若直線  $L$  分別與三角形  $ABC$  及三角形  $DEF$  各恰有一個交點，則  $L$  的斜率之最小可能值為 ⑰ ⑱。

【說明】

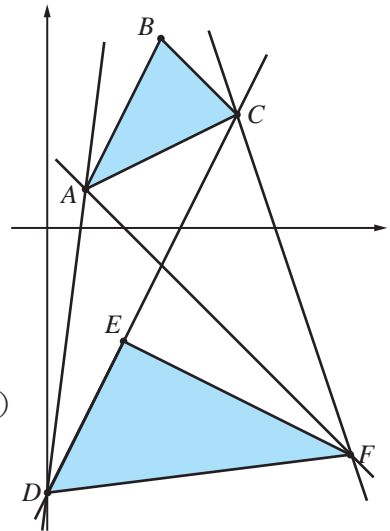
作圖輔助，即可看出  $CF$  連線斜率最小， $AD$  連線斜率最大。

$$m_{AF} = \frac{1 - (-6)}{1 - 8} = -1,$$

$$m_{CF} = \frac{3 - (-6)}{5 - 8} = -3 \text{ (最小),}$$

$$m_{AD} = \frac{1 - (-7)}{1 - 0} = 8 \text{ (最大),}$$

$$m_{DC} = m_{EC} = \frac{3 - (-7)}{5 - 0} = 2 \text{ (即 } D, E, C \text{ 三點共線，不符題意)}$$



範例7：101年選填題D

設點  $A(-2, 2)$ 、 $B(4, 8)$  為坐標平面上兩點，且點  $C$  在二次函數  $y = \frac{1}{2}x^2$  的圖形上變動。當  $C$  點的  $x$  坐標為 ⑳ ㉑ 時，內積  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  有最小值 ㉒ ㉓。

【說明】

利用拋物線上的點之參數式表示法，配合向量內積運算及配方法，求算最小值。

解題過程略述：

取  $C$  坐標為  $(t, \frac{1}{2}t^2)$ ，

$$\text{則 } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = (6, 6) \cdot (t+2, \frac{1}{2}t^2-2) = 3(t+1)^2 - 3 \geq -3,$$

所以，當  $C$  點的  $x$  坐標為  $x=t=-1$  時，內積  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  有最小值  $-3$ 。

## 貳、從 99 課綱及近年數學學測試題，看 102 學測命題趨勢

從歷年來考題統計發現，指數與對數、三角(99 課綱先只談三角，於高三才談三角函數。)、圓錐曲線(拋物線、圓、橢圓、雙曲線)、方程組與行列式、多項式、向量(平面與空間)等，都是出現頻率(占分或題型)相對較高的主題，其他如機率、排列組合、統計、數列級數等，也幾乎是每年出現，但相較之下，占分或題型則沒前述單元來的多。此外，99 課綱與 95 暫綱或更早期的高中數學課本在章節的編排上有很大的不同，所以在準備學測的重點上，也需略作調整。首先，我們列出學測範圍內在 99 課綱中新增的重點項目：

- (1)有理數與實數的十進位表示法。
- (2)插值多項式(拉格朗日插值法、牛頓插值法)。
- (3)函數的奇偶性、單調性、凹凸性及平移。
- (4)條件機率、貝氏定理、獨立事件。(95 課綱列在高三課程)
- (5)統計之散布圖、相關係數、迴歸直線與最小平方法、數據標準化。  
(數據標準化為新增項目，其餘項目在 95 課綱列於高三課程)

其中，插值多項式是全新課程，例如利用插值多項式來求多項式  $f(x)$  被  $(x-a)(x-b)$  除的餘式等相關問題，不妨多著墨一些。條件機率、貝氏定理與獨立事件也是機率單元中相當重要的章節，不過依歷年的命題情形，通常排列組合與機率的題目都不難，只要思路清楚，都很容易解出答案，這部分不必練習過於艱深的題目。而統計單元一直很重視觀念，也難得考繁瑣的計算，若能對各項統計值與統計圖表的意義通盤了解，即可輕鬆應付。

接下來，我們列出過去為學測範圍內的重點，但在 99 課綱中已調整的項目：

- (1)統計抽樣(只談簡單隨機抽樣)、信賴區間與信心水準的解讀已移到高三選修。
- (2)期望值已移到高三選修。
- (3)三角只談  $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$  三者，且不含和差化積與積化和差。
- (4)弧度量、三角函數(含  $\sec$ 、 $\csc$ 、 $\cot$ )及其圖形、正餘弦函數的疊合、複數極式與棣美弗定理均已移至高三選修。
- (5)不談球面方程式。
- (6)不談圓錐曲線的光學性質。

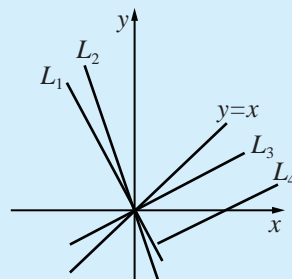
所以，對於上列的幾項主題的準備，也需重作調整，在以歷年考題做練習時，若有碰到類似上述已調整移走的相關問題時，可以直接跳過。

最後，我們不禁想再度強調，研究歷年的學科能力測驗數學考科的試題，可以發現不管在哪一單元的命題，使用概念直接解題的題目占大多數，而且當解題需有一些計算工作時，其所需的計算大多不會太複雜，而且所需的解題步驟也很少。其中，或許為了鑑別度需要，每年大概只有兩三題的計算步驟會感覺較多而稍感繁雜，但也都只是使用基本的解題概念與步驟，並不涉及特殊解法。以三角的正餘弦定理、面積公式來說，這類的計算也都很基礎；而在圓錐曲線(拋物線、橢圓、雙曲線)方面，一直很重視基本定義與標準式的關係，若需計算時，只要依基本定義關係(例如  $a, b, c$  關係等)大都可以輕鬆應付。所以，考生所要準備的重點也不在解題技巧，而是要熟悉及瞭解 99 課綱所列的數學基本概念，並加以扎實演練即可。

## 附件

### 98年多選題第8題

坐標平面上四條直線  $L_1, L_2, L_3, L_4$  與  $x$  軸、 $y$  軸及直線  $y=x$  的相關位置如圖所示，其中  $L_1$  與  $L_3$  垂直，而  $L_3$  與  $L_4$  平行。設  $L_1, L_2, L_3, L_4$  的方程式分別為  $y=m_1x, y=m_2x, y=m_3x$  以及  $y=m_4x+c$ 。



- 試問下列哪些選項是正確的？  
 (1)  $m_3 > m_2 > m_1$    (2)  $m_1 \cdot m_4 = -1$    (3)  $m_1 < -1$   
 (4)  $m_2 \cdot m_3 < -1$    (5)  $c > 0$ 。

解 (2)(3)(4)

### 99年單選題第2題

已知  $a, b$  為整數且行列式  $\begin{vmatrix} 5 & a \\ b & 7 \end{vmatrix} = 4$ ，則絕對值  $|a+b|$  為何？

- (1) 16   (2) 31   (3) 32   (4) 39   (5) 條件不足，無法確定。

解 (3)

### 100年選填題第F題

設  $E_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (其中  $a > 0$ ) 為焦點在  $(3, 0), (-3, 0)$  的橢圓； $E_2$ : 焦點在  $(3, 0)$  且準線為  $x = -3$  的拋物線。已知  $E_1, E_2$  的交點在直線  $x = 3$  上，則  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解  $3 + 3\sqrt{2}$



誠摯邀請老師分享您精闢的見解及投稿，投稿請寄：[we04@chwa.com.tw](mailto:we04@chwa.com.tw)

- 您的稿件企劃部將視情況刪修，修改後會寄給您過目，您同意後才會刊登。
- 投稿作品，視同授權本刊書面及電子版刊載。作品一經刊登將依字數致贈稿酬。

- 來稿請勿侵害他人著作權，如有引文，請註明參考資料來源。
- 來稿請附作者資料：姓名、任教學校、聯絡電話／地址、電子郵件信箱。

如有任何疑問，歡迎您 E-mail 或來電詢問：02-2262-5666 # 213 楊先生。

本公司已盡力處理刊物中圖文的著作權事宜，倘有疏漏，惠請著作權人能與本公司聯繫，僅此致謝。

總公司／北區高中營業處  
 地址：新北市土城區忠義路 21 號  
 電話：(02) 2262-5666  
 傳真：(02) 2262-0565

中區高中營業處  
 地址：臺中市南區樹義一巷 26 號 2 樓  
 電話：(04) 2261-8485  
 傳真：(04) 3601-8600

南區高中營業處  
 地址：高雄市三民區應安街 12 號  
 電話：(07) 381-1377  
 傳真：(07) 960-2868